UNIVERSITÉ DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2003 N° B.U. :

Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes
en co-tutelle avec l'Université de Düsseldorf

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Présentée et soutenue publiquement par

Christelle CHESNÉ

le 24 Novembre 2003
à l'Université de Düsseldorf

Titre

EXTENSIONS PONCTUELLES D'ALGÈBRES HÉRÉDITAIRES SAUVAGES

Jury

Président	:	Wilhelm SINGHOF	Professeur (Düsseldorf)
Rapporteurs	:	Bernhard KELLER	Professeur (Paris VII)
		Claus Michael RINGEL	Professeur (Bielefeld)
Examinateurs	:	Vincent FRANJOU	Professeur (Nantes)
		Bernhard KELLER	Professeur (Paris VII)
		Otto KERNER	Professeur (Düsseldorf)
		Christoph SORGER	Professeur (Nantes)
		Robert WISBAUER	Professeur (Düsseldorf)
		Claus Michael RINGEL	Invité - Professeur (Bielefeld)

Directeurs de Thèse : Vincent FRANJOU et Otto KERNER
Laboratoire : Jean Leray (UMR 6629 CNRS/UN)
Composante : Faculté des Sciences et Techniques N° É.D. : 0366-

Table des matières

Introduction

La théorie des représentations des algèbres de dimension finie consiste en l'étude des catégories des modules sur ces algèbres. Soit k un corps, qui sera toujours supposé algébriquement clos, et soit A une k-algèbre de dimension finie. Nous notons $A-\mathrm{mod}$ la catégorie des A-modules de type fini. Pour décrire cette catégorie, on dispose d'une approche efficace : on considère $\Gamma(A)$, le carquois d'Auslander-Reiten de A, qui permet de visualiser la catégorie $A-\mathrm{mod}/\operatorname{rad}^\infty(A-\mathrm{mod})$, où $\operatorname{rad}^\infty(A-\mathrm{mod})$ désigne l'idéal des morphismes qui possèdent des factorisations de toute longueur. La translation d'Auslander-Reiten τ_A munit $\Gamma(A)$ d'une structure de carquois de translation. Dans beaucoup de cas particuliers, il est possible de décrire le carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre de dimension finie, comme dans l'exemple d'une algèbre héréditaire. (Une algèbre est dite héréditaire quand elle est de dimension globale 0 ou 1.)

Les extensions ponctuelles constituent une technique de récurrence utile pour les algèbres. Si $\hat{A}$ est une algèbre réduite de dimension finie et s'il existe un $\hat{A}$-module simple et injectif S_ω, alors $\hat{A}$ peut s'écrire comme l'anneau formel des matrices triangulaires supérieures

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & k \end{pmatrix} = A[X] \ .$$

L'algèbre $\hat{A}$ est alors appelée extension ponctuelle de A par le A-module X. L'anneau des matrices est construit de la façon suivante : soit e_ω un idempotent primitif de $\hat{A}$ tel que $\hat{A}e_\omega$ soit la couverture projective de S_ω, alors $\hat{A}e_\omega$ forme un idéal bilatère de $\hat{A}$. L'algèbre A est définie par $A = \hat{A} \,/\, Ae_\omega = (1-e_\omega)\hat{A}(1-e_\omega)$ et $X = \operatorname{rad} Ae_\omega$ est un A-module. Ainsi, $A-\mathrm{mod}$ constitue une sous catégorie pleine et exacte de $\hat{A}-\mathrm{mod}$. Si M est un $\hat{A}$-module indécomposable, alors : soit M est un A-module, soit M est isomorphe à S_ω, ou soit M s'écrit $M = (M_0, V, \varphi)$ pour $M_0 \in A-\mathrm{mod}$, $V \in k-\mathrm{mod}$ et $\varphi : V \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(X, M_0)$ une application linéaire injective. S'il n'existe que peu de $\hat{A}$-modules indécomposables M_0 tels que $\operatorname{Hom}_A(X, M_0) \neq 0$, et si les dimensions des espaces $\operatorname{Hom}_A(X, M_0)$ sont relativement petites, alors on dispose de bonnes perspectives de pouvoir décrire les $\hat{A}$-modules indécomposables qui ne sont pas dans $A-$mod.

Une algèbre héréditaire H est dite sauvage s'il existe pour toute k-algèbre de dimension finie B une inclusion pleine et exacte $B-\text{mod} \longrightarrow H-\text{mod}$. Dans ce cas, H est aussi sauvage dans le sens de [3]. Cette appellation reflète la complexité de la catégorie des modules d'une algèbre héréditaire sauvage.

Soit désormais H une algèbre héréditaire sauvage et X un H-module non-trivial. En général, on ne peut pas obtenir la structure d'Auslander-Reiten de $H[X]$ à partir de celle de H. En particulier, la question de l'existence d'une composante pré-injective dans le carquois d'Auslander-Reiten de $H[X]$ (c'est-à-dire d'une composante sans cyle orienté, qui n'a qu'un nombre fini de τ-orbites, et dont chaque τ-orbite contient un point projectif) reste ouverte. Une réponse a cependant déjà été apportée dans certains cas particuliers importants.

Soit $R \neq 0$ un H-module régulier tel que $H[R]$ soit une algèbre basculée de type H_0 (c'est-à-dire que $H[R]$ est l'anneau des endomorphismes d'un module basculant sur H_0). Alors, $H[\tau_H^m R]$ est elle-aussi une algèbre basculée de type H_0 pour tout $m \geq 0$ d'après F. Lukas [13, 5.2.4]. Ainsi, selon H. Strauss [15, Th. A], le carquois d'Auslander-Reiten de $H[\tau_H^m R]$ possède une composante pré-injective pour tout $m \geq 0$. En revanche, $H[\tau_H^{-m} R]$ n'est pas une algèbre basculée pour $m \gg 0$. Elle est cependant héréditaire par morceaux de type H_0 par [13], ce qui signifie que les catégories dérivées de $H[\tau_H^{-m} R]-$mod et H_0-mod sont équivalentes. S. Lache [12, Th. 2] a montré dans ce cas qu'une composante pré-injective existe. Il a aussi décrit toutes les autres composantes de $H[\tau_H^{-m} R]$. Avec une approche différente, O. Kerner and A. Skowroński [10] ont prouvé l'existence d'une composante pré-injective dans $\Gamma(H[\tau_H^m X])$ pour des algèbres de chemins très spécifiques et pour $m \gg 0$ ou $m \ll 0$. Le but principal de cette thèse est de démontrer ce résultat pour toute algèbre héréditaire sauvage.

Soit $H = H_1 \times \ldots \times H_t$ la décomposition de H en produit d'algèbres connexes. Nous choisissons $r \in \{0, \ldots t\}$ ainsi qu'un H-module $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_t$ de façon à ce que X_i soit un H_i-module pour tout i et que $\tau_H^m X_1, \ldots, \tau_H^m X_r$ et $\tau_H^{-m} X_{r+1}, \ldots, \tau_H^{-m} X_t$ soient non-triviaux pour tout $m \geq 0$. Nous considérons le module :

$$X(m) = \tau_H^m X_1 \oplus \ldots \oplus \tau_H^m X_r \oplus \tau_H^{-m} X_{r+1} \oplus \ldots \oplus \tau_H^{-m} X_t \ .$$

Si toutes les $H_1, \ldots, H_t$ sont sauvages, alors nous pouvons formuler le résultat suivant, qui décrit une infinité de composantes dans $\Gamma(H[X(m)])$.

Théorème : *Soit $m \gg 0$ et soit l'extension ponctuelle $A = H[X(m)]$. Alors, on a :*

(a) Le carquois d'Auslander-Reiten de A possède exactement une composante pré-injective. C'est la composante pré-injective d'une algèbre héréditaire sauvage $\tilde{A}$.

(b) Chaque composante régulière de $\Gamma(\tilde{A})$ induit une composante de type $\mathbb{Z}\mathbf{A}_\infty$ dans le carquois d'Auslander-Reiten stable de A.

(c) Pour tout $\tilde{A}$-module N régulier, il existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\tau_A^l \tau_{\tilde{A}}^{l_0} N \simeq \tau_{\tilde{A}}^{l+l_0} N \quad \text{pour tout } l \geq 0 \ .$$

Le nombre des τ-orbites de la composante pré-injective de $\tilde{A}$ est déterminé par les données combinatoires des carquois des algèbres $H_1, \ldots, H_t$: on définit μ_i comme le nombre des classes d'isomorphisme de H_i-modules pré-injectifs simples pour $1 \leq i \leq r$, et comme le nombre des classes d'isomorphisme de H_i-modules simples pré-injectifs ou réguliers pour $r+1 \leq i \leq t$. D'après S. König [11], ces nombres peuvent être calculés simplement à partir de la structure des carquois des algèbres $H_1, \ldots, H_t$. La composante pré-injective de $\Gamma(H[X(m)])$ possède alors exactement $(\sum \mu_i + 1)$ τ-orbites.

Dans le cas d'une extension ponctuelle héréditaire par morceaux $H[\tau_H^m R]$, notre résultat permet de décrire la composante pré-injective du carquois d'Auslander-Reiten (dont seule l'existence était déjà connue par [12]) pour tout m tel que $|m| \gg 0$. Les assertions *(b)* et *(c)* impliquent bien sûr aussi que le carquois d'Auslander-Reiten de $H[X(m)]$ possède une infinité de composantes régulières de type $\mathbb{Z}\mathbf{A}_\infty$.

On peut facilement dualiser ce théorème pour l'appliquer à des co-extensions ponctuelles. Dans ce cas, on démontre en particulier l'existence d'une composante pré-projective.

Chapitre 1

Notions de base

Ce chapitre a pour but d'introduire brièvement les concepts et les résultats "classiques" nécessaires à la compréhension de ce travail. Pour les détails et les démonstrations, le lecteur intéressé se rapportera aux publications de M. Auslander, I. Reiten et S. Smalø [1], de C. M. Ringel [14] et d'O. Kerner [7].

Soit k un corps algébriquement clos. Toutes les algèbres que nous considérons sont des k-algèbres de dimension finie. Pour une algèbre A fixée, un "A-module" désigne toujours un module à gauche de type fini sur A. La catégorie de ces modules est notée $A-$mod.

1.1 Carquois et algèbres de chemins

Un *carquois* $\mathcal{Q}$ est un graphe orienté. Il est constitué d'un ensemble de points $\mathcal{Q}_0$ et d'un ensemble de flèches $\mathcal{Q}_1$. On associe à chaque flèche α son point de départ $s(\alpha)$ et son point d'arrivée $e(\alpha)$. Le carquois $\mathcal{Q}$ est dit fini si $\mathcal{Q}_0$ et $\mathcal{Q}_1$ sont des ensembles finis. Pour deux points i, $j \in \mathcal{Q}_0$, on appelle *chemin de longueur* r toute suite non vide de flèches $\alpha_r \dots \alpha_1$, telle que $s(\alpha_1) = i$, $e(\alpha_r) = j$ et $s(\alpha_t) = e(\alpha_{t-1})$ pour $2 \leq t \leq r$. De plus, on définit en tout point i un *chemin vide* e_i (de longueur 0) de i vers i.

Soit $\mathcal{Q}$ un carquois. L'*algèbre des chemins* $k\mathcal{Q}$ est définie comme étant le k-espace vectoriel qui a les chemins de $\mathcal{Q}$ pour base, muni de la multiplication suivante : pour deux chemins $w_1 = \alpha_r \dots \alpha_1$ et $w_2 = \beta_s \dots \beta_1$ le produit est

$$w_1 \cdot w_2 = \begin{cases} \alpha_r \dots \alpha_1 \, \beta_s \dots \beta_1 & \text{si } s(\alpha_1) = e(\beta_s) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'algèbre $k\mathcal{Q}$ ainsi obtenue est de dimension finie si et seulement si le carquois est fini et ne possède pas de cycle orienté (c'est-à-dire pas de chemin non vide partant et arrivant au même point). Cett algèbre est connexe si et seulement si le carquois $\mathcal{Q}$ est connexe. Si $\mathcal{Q}$ est fini, alors $k\mathcal{Q}$ possède un élément neutre pour la multiplication : $1_{kQ} = \sum_{i \in Q_0} e_i$, et elle est une algèbre héréditaire, ce qui signifie qu'elle remplit une des hypothèses (et ainsi toutes) de la proposition suivante.

Proposition 1.1.1 *Pour une algèbre A, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout sous-module d'un A-module projectif est projectif.*
2. *Tout quotient d'un A-module injectif est injectif.*
3. *La dimension globale de A est 0 ou 1.*
4. *Pour tous $X, Y \in A-\mathrm{mod}$ et tout $i \geq 2$, on a : $\mathrm{Ext}^i_A(X,Y) = 0$.*

Désormais, Q désignera toujours un carquois fini et sans cycle orienté, les algèbres de chemins kQ seront donc toutes de dimension finie.

La *catégorie des chemins* $\mathcal{W}(Q)$ de Q est la catégorie ayant pour objets les points de Q et pour morphismes les chemins dans Q. Une *représentation de Q sur k* est un foncteur covariant $F : \mathcal{W}(Q) \to k-\mathrm{mod}$, où $k-\mathrm{mod}$ désigne la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie. Les représentations de Q sur k forment une catégorie abélienne que nous notons $\mathrm{rep}_k Q$.

Proposition 1.1.2 *Soit Q un carquois. Les catégories $kQ-\mathrm{mod}$ et $\mathrm{rep}_k Q$ sont équivalentes.*

Soit kQ une algèbre de chemins. Pour $n \geq 1$, nous définissons $< kQ^+ >^n$ comme l'idéal engendré par les chemins de longueur au moins n. L'idéal $< kQ^+ >$ est nilpotent et coïncide avec le radical de kQ. On a :

$$kQ \;/\; \mathrm{rad}\; kQ \simeq \prod_{i \in Q_0} k \;.$$

Une algèbre de dimension finie A, telle que $A/\mathrm{rad}\, A$ est isomorphe à k^r ($r \in \mathbb{N}$), est dite *réduite*. Ainsi, toute algèbre de chemins est une algèbre héréditaire réduite de dimension finie. Comme beaucoup d'algèbres ne sont pas héréditaires, on ne peut pas représenter toute algèbre réduite par une algèbre de chemins. La proposition suivante nous montre quel rôle important cette classe d'algèbres joue cependant.

Proposition 1.1.3 *Soit A une algèbre réduite de dimension finie sur k et soit $\{S_1, \ldots, S_n\}$ un système complet de représentants pour les A-modules simples. Nous définissons Q_A comme le carquois ayant pour points $1, \ldots, n$ et où se trouvent $\dim_k \mathrm{Ext}^1_A(S_i, S_j)$ flèches de i vers j pour tous points i, j de Q_A. Alors il existe un unique idéal bilatère $I \subset < kQ^+ >^2$, tel que A soit isomorphe à kQ_A/I.*

L'hypothèse "A réduite" n'est pas une restriction de la généralité lorsque l'on s'intéresse à la catégorie des modules. Pour toute algèbre de dimension finie A, il existe en effet une algèbre réduite A^b telle que $A-$mod et A^b-mod soient des catégories équivalentes (A et A^b sont alors dites Morita-équivalentes). Si A est héréditaire, alors l'algèbre réduite A^b est de plus isomorphe à une algèbre de chemins ($I = 0$ dans la proposition).

Le *type de représentation* est un critère utile pour classifier des algèbres suivant la complexité de leur catégorie des modules. Une k-algèbre A est appelée *de représentation finie* lorsqu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de A-modules. Si ce n'est pas le cas, on la dit *de représentation infinie* et elle est d'après Drozd [3] soit docile, soit sauvage. Il nous suffit donc de donner la définition d'une algèbre sauvage.

Définition : Soit $k < X, Y >$ l'algèbre libre des polynômes en deux inconnues non-commutatives sur k. Une k-algèbre est dite *sauvage* s'il existe un bimodule M sur $(A, k < X, Y >)$ de type fini, qui est libre en tant que $k < X, Y >$-module, et tel que le foncteur

$$F = (M \otimes_{k<X,Y>} -) : k<X, Y> -\text{mod} \to \ A-\text{mod}$$

préserve l'indécomposabilité et les classes d'isomorphismes.

Les concepts "docile" et "sauvage" correspondent à l'attente de pouvoir décrire plus facilement la catégorie des modules sur une algèbre docile que sur une algèbre sauvage. En général, il est difficile de déterminer le type de représentation d'une algèbre donnée. Dans le cas particulier d'une algèbre de chemins connexe, on peut cependant formuler le résultat suivant :

Proposition 1.1.4 *Soit kQ une algèbre de chemins connexe.*

- *kQ est de représentation finie si et seulement si Q est un carquois de type Dynkin (c'est-à-dire de la forme A_n, D_n, E_6, E_7 ou E_8).*
- *kQ est docile si et seulement si Q est un carquois de type euclidien (c'est-à-dire de la forme $\tilde{A}_n$, $\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$ ou $\tilde{E}_8$).*
- *kQ est sauvage dans tous les autres cas.*

1.2 Aperçu sur la théorie des représentations

Soit A une algèbre de dimension finie sur un corps k. Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'expliciter certaines techniques efficaces pour décrire la catégorie des A-modules de type fini.

La translation d'Auslander-Reiten

Soit X et Y deux A-modules. On définit $\mathbb{P}(X,Y)$ comme le sous-espace de $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$ constitué des homomorphismes qui factorisent par un A-module projectif. De manière duale, on pose $\mathbb{I}(X,Y)$ l'ensemble des morphismes qui factorisent par un A-module injectif. Avec ces concepts, nous pouvons définir :

- $\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y)$ comme l'espace quotient $\mathrm{Hom}_A(X,Y)/\mathbb{P}(X,Y)$,
- $\overline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y)$ comme l'espace quotient $\mathrm{Hom}_A(X,Y)/\mathbb{I}(X,Y)$.

Nous obtenons ainsi deux catégories quotient de $A-$mod : $A-\overline{\mathrm{mod}}$ (respectivement $A-\underline{\mathrm{mod}}$) a pour objets les A-modules et pour morphismes entre deux modules X et Y les éléments de $\underline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y)$ (respectivement $\overline{\mathrm{Hom}}_A(X,Y)$).

La *translation d'Auslander-Reiten* dans A est le foncteur

$$\tau_A = \mathrm{D}\,\mathrm{Tr} : A-\underline{\mathrm{mod}} \longrightarrow A-\overline{\mathrm{mod}} \ ,$$

où D$=\mathrm{Hom}_k(-,k)$ désigne la dualité et Tr la transposition classique. Dans le cas particulier d'une algèbre héréditaire, Tr est isomorphe au foncteur $\mathrm{Ext}^1_A(-,A)$. La translation τ_A est une équivalence de catégories ayant pour inverse

$$\tau_A^- = \mathrm{Tr}\,\mathrm{D} : A-\overline{\mathrm{mod}} \longrightarrow A-\underline{\mathrm{mod}} \ .$$

La proposition suivante nous apporte une formule très utile pour comparer les espaces Hom_A et Ext^1_A entre des modules.

Proposition 1.2.1 *(Formule d'Auslander-Reiten). Pour deux A-modules X et Y, on a :*

$$\mathrm{Ext}^1_A(X,Y) \simeq \mathrm{D}\,\overline{\mathrm{Hom}}_A(Y,\tau_A X) \simeq \mathrm{D}\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau_A^- Y, X)$$

en tant que $(\mathrm{End}_A(X),\mathrm{End}_A(Y))$*-bimodules. Si A est héréditaire, on en déduit en particulier :*

$$\mathrm{Ext}^1_A(X,Y) \simeq \mathrm{D}\,\mathrm{Hom}_A(Y,\tau_A X) \simeq \mathrm{D}\,\mathrm{Hom}_A(\tau_A^- Y, X).$$

Suites d'Auslander-Reiten

Une suite exacte courte $0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$ est dite *suite d'Auslander-Reiten* (ou suite presque scindée) si elle remplit les conditions suivantes :

1. La suite n'est pas scindée.
2. Pour tout $M \in A-$mod, tout morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(X,M)$ qui n'est pas un monomorphisme scindé factorise par f.
3. Pour tout $N \in A-$mod, tout morphisme $\psi \in \mathrm{Hom}_A(N,Z)$ qui n'est pas un épimorphisme scindé factorise par g.

Dans ce cas, on en déduit immédiatement que X est un module indécomposable non injectif et que Z est un module indécomposable non projectif. Les notions de suite et de translation d'Auslander-Reiten sont très proches l'une de l'autre, comme nous le montre le résultat suivant :

Proposition 1.2.2 *Si $Z \in A-\mathrm{mod}$ est indécomposable et non projectif, alors il existe (à isomorphisme près) exactement une suite d'Auslander-Reiten qui a Z pour terme final. Elle a la forme*

$$0 \longrightarrow \tau_A Z \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0 \ .$$

Le terme central U de cette suite n'est en général pas indécomposable. Nous considérons une décomposition de $U = \bigoplus_{i=1}^{r} U_i$ en modules indécomposables, et nous intéressons aux propriétés des applications partielles $f_i : \tau_A Z \longrightarrow U_i$ und $g_i : U_i \longrightarrow Z$ pour $i = 1, \ldots, r$.

Définition : Soient X, Y des modules indécomposables. Un homomorphisme $h : X \longrightarrow Y$ est dit *irréductible* s'il n'est pas scindé et si pour tout module M on a : si f possède une factorisation $f = \alpha\beta$ pour un $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(X, M)$ et un $\beta \in \mathrm{Hom}_A(M, Y)$, alors α est un mono scindé ou β est un épi scindé.

On en déduit directement que tout morphisme irréductible est ou bien injectif, ou bien surjectif. Les applications partielles f_i et g_i citées plus haut sont irréductibles. On a réciproquement : tout morphisme irréductible entre des modules indécomposables peut être obtenu comme application partielle provenant d'une suite d'Auslander-Reiten.

Carquois d'Auslander-Reiten

Pour deux A-modules X et Y, on définit :

$$\mathrm{rad}(X,Y) = \left\{ f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y) \mid \begin{array}{l} \text{Pour tout } U \in A-\mathrm{mod} \text{ indécomposable,} \\ \text{l'ensemble } \mathrm{Hom}_A(U,X) f \,\mathrm{Hom}_A(Y,U) \\ \text{ne contient pas d'automorphismes.} \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{rad}^2(X,Y) = \left\{ f \in \mathrm{Hom}_A(X,Y) \mid \begin{array}{c} \exists\, Z \in A-\mathrm{mod},\ \exists\, g \in \mathrm{rad}(X,Z) \\ \text{et } h \in \mathrm{rad}(Z,Y) \text{ tels que } f = gh. \end{array} \right\}$$

Soit $\mathrm{Irr}\,(X,Y) = \mathrm{rad}(X,Y)/\,\mathrm{rad}^2(X,Y)$. Ce concept est étroitement lié à celui d'application irréductible. Considérons en effet pour un module X indécomposable et non projectif la suite d'Auslander-Reiten

$$0 \longrightarrow \tau_A X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{s} U_i^{r_i} \longrightarrow X \longrightarrow 0 \ ,$$

où tous les U_i sont indécomposables et deux à deux non isomorphes. Alors on a :

- Pour tout $i \in \{1, ..., s\}$ $\dim_k \mathrm{Irr}\,(\tau_A X, U_i) = r_i = \dim_k \mathrm{Irr}\,(U_i, X)$,
- Pour tout $V \in A$-ind $\mathrm{Irr}\,(\tau_A X, V) \neq 0 \Leftrightarrow \exists\, i \in \{1, ..., n\}\ V \simeq U_i$
$\Leftrightarrow \mathrm{Irr}\,(V, X) \neq 0$.

Nous pouvons maintenant définir le *carquois d'Auslander-Reiten de A*, noté $\Gamma(A)$:

- Les points de $\Gamma(A)$ sont les classes d'isomorphismes des A-modules indécomposables.
- Pour deux A-modules X et Y on pose $\dim_k \mathrm{Irr}\,(X, Y)$ flèches de $[X]$ vers $[Y]$.

Avec $\Gamma(A)$, nous nous sommes dotés d'un outil qui permet d'obtenir une bonne vue d'ensemble de la catégorie des A-modules. Désormais, nous ne ferons plus de distinction entre les modules indécomposables et leur classe d'isomorphisme.

Le carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre de dimension finie est toujours localement fini (c'est-à-dire qu'en un point ne démarre et n'arrive qu'un nombre fini de flèches), mais en général, il n'est pas fini. Le plus souvent, il n'est pas non plus connexe, et possède même une infinité de composantes.

Pour X un module indécomposable, on appelle l'ensemble $\{\tau_A^i X,\ i \in \mathbb{Z}\}$ *τ_A-orbite de X*. Une composante connexe de $\Gamma(A)$ sans cycle orienté, qui ne contient qu'un nombre fini de τ_A-orbites, et donc chaque τ_A-orbite contient un module projectif, est dite *pré-projective.* On définit de façon analogue une *composante pré-injective.* Un module indécomposable X est *pré-projectif* (respectivement *pré-injectif*) s'il appartient à une composante pré-projective (respectivement *pré-injective*) de $\Gamma(A)$.

Un A-module X qui vérifie l'isomorphisme $\tau_A^m \tau_A^{-m} X \simeq X$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ est dit *régulier.* Une composante connexe de $\Gamma(A)$ qui ne contient que des modules réguliers est également dite régulière.

Le carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre de dimension finie ne possède pas nécessairement de composante pré-injective ou pré-injective. Dans le cas d'une algèbre de carquois, on peut par contre bien décrire les différentes composantes :

Proposition 1.2.3 *Soit kQ l'algèbres des chemins d'un carquois connexe fini sans cycle orienté.*

1. *Si kQ est de représentation finie, alors $\Gamma(H)$ est connexe. Son unique composante est finie, pré-projective et pré-injective.*
2. *Si kQ est de représentation infinie, alors $\Gamma(H)$ possède exactement une composante pré-projective et une composante pré-injective, qui contiennent respectivement tous les modules pré-projectifs et tous les modules pré-injectifs. Il existe un infinité d'autres composantes, elles sont toutes régulières.*

Les composantes régulières peuvent être décrites plus précisément. Elles sont différentes suivant que kQ est docile ou sauvage.

1.3 La catégorie des modules d'une algèbre héréditaire sauvage

Soit $H = kQ$ une algèbre de chemins sauvage de dimension finie sur un carquois connexe Q. Pour pouvoir décrire les composantes connexes de $\Gamma(H)$, nous devons auparavant fixer quelques notations.

Pour un carquois Λ (qui peut être infini) et un intervalle I de $\mathbb{Z}$ on définit un nouveau carquois $I\Lambda$ de la manière suivante : les points de $I\Lambda$ sont les éléments de $I \times \Lambda_0$, on associe à chaque flèche $\alpha : x \longrightarrow y$ de Λ et à chaque $z \in I$ les flèches dans $I\Lambda$

$$\begin{array}{l}(z,\alpha) : (z,x) \longrightarrow (z,y) \\ (z,\alpha)' : (z,y) \longrightarrow (z+1,x) \text{ si } z+1 \in I.\end{array}$$

On note $\mathbf{A}_\infty$ le carquois infini

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \ \cdots .$$

$\Gamma(H)$ est constitué exclusivement des composantes suivantes :

- la composante pré-projective $\mathcal{P}(H) = \mathbb{N}Q^*$, où Q^* est le carquois dual à Q (c'est-à-dire le carquois où les flèches sont inversées),
- la composante pré-injective $\mathcal{I}(H) = -\mathbb{N}Q^*$,
- une infinité de composantes régulières de la forme $\mathbb{Z}\mathbf{A}_\infty$.

La figure 1.1 nous permet de visualiser ces composantes.

Nous allons maintenant donner une première description des homomorphismes entre H-modules. Comme $H-$mod est une catégorie de Krull-Schmidt, il nous suffit de considérer les applications entre modules indécomposables.

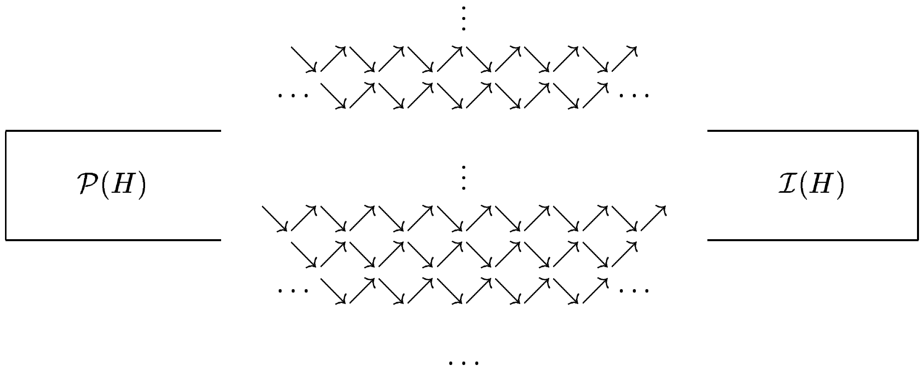

FIG. 1.1 – Carquois d'Auslander-Reiten d'une algèbre héréditaire sauvage

Proposition 1.3.1 *Soit X_p, X_r et X_i des H-modules indécomposables tels que X_p soit pré-projectif, X_r soit régulier et que X_i soit pré-injectif. Alors on a :*

1. $\mathrm{Hom}_H(X_i, X_r) = \mathrm{Hom}_H(X_i, X_p) = \mathrm{Hom}_H(X_r, X_p) = 0$
2. *Pour tout $c > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :*
   (a) $\dim_k \mathrm{Hom}_H(X_p, \tau_H^m X_r) \geq c$ *pour tout m tel que $|m| \geq N$,*
   (b) $\dim_k \mathrm{Hom}_H(X_p, \tau_H^m X_i) \geq c$ *pour tout m tel que $m \geq N$,*
   (c) $\dim_k \mathrm{Hom}_H(\tau_H^m X_r, X_i) \geq c$ *pour tout m tel que $|m| \geq N$.*

Ceci entraîne en particulier que $\Gamma(H)$ ne contient qu'un nombre fini de modules qui ne soient pas sincères.

Proposition 1.3.2 *Soit X et Y des H-modules indécomposables.*

(a) Si X et Y sont pré-projectifs, alors :

- $\mathrm{Hom}_H(X, Y) \neq 0 \;\Rightarrow\;$ *X est un prédécesseur de Y dans $\mathcal{P}(H)$.*
- $\forall\, c > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\dim_k \mathrm{Hom}_H(X, \tau_H^{-m} Y) \geq c \quad \forall\, m \geq N.$

(b) De façon duale, on a pour X et Y pré-injectifs :

- $\mathrm{Hom}_H(X, Y) \neq 0 \;\Rightarrow\;$ *Y est un successeur de X dans $\mathcal{I}(H)$.*
- $\forall\, c > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\dim_k \mathrm{Hom}_H(\tau_H^m X, Y) \geq c \quad \forall\, m \geq N.$

On déduit de cette proposition que les modules indécomposables pré-projectifs ou pré-injectifs ne peuvent pas avoir d'auto-extensions. La situation est différente pour les modules réguliers :

Proposition 1.3.3 *Soit X et Y deux H-modules indécomposables réguliers. Alors :*

(a) Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Hom}_H(\tau_H^m X, Y) = 0$ pour tout $m \geq N_1$.

(b) Pour tout $c > 0$ il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\dim_k \mathrm{Hom}_H(X, \tau_H^m Y) \geq c$ pour tout $m \geq N_2$.

Les morphismes entre H-modules possèdent de fortes propriétés de factorisation (O. Kerner, [8]) :

Proposition 1.3.4 *Soit X_p un H-module pré-projectif, X_r un H-module régulier et X_i un H-module pré-injectif. Pour tout module régulier $R \neq 0$, on a :*

(a) Chaque homomorphisme $X_p \xrightarrow{f} X_r$ factorise par $\tau_H^{-m} R$ pour $m \gg 0$.

(b) Chaque homomorphisme $X_r \xrightarrow{g} X_i$ factorise par $\tau_H^m R$ pour $m \gg 0$.

(c) Chaque homomorphisme $X_p \xrightarrow{h} X_i$ factorise par $\tau_H^m R$ pour $|m| \gg 0$.

Corollaire 1.3.5 *Soit X_p, X_r und X_i comme dans la proposition 1.3.4*

(a) Il existe des monomorphismes $X_j \longrightarrow \tau_H^m X_i$ $(j = p, r)$ pour $m \gg 0$.

(b) Il existe des épimorphismes $\tau_H^{-m} X_p \longrightarrow X_j$ $(j = r, i)$ pour $m \gg 0$.

Si l'on s'intéresse à des modules plus spécifiques, on peut formuler le résultat suivant (L. Unger, [16, 1.3]) :

Proposition 1.3.6 *Soit X et Y des H-modules indécomposables sans auto-extension, tels que $\mathrm{Ext}_H^1(X, Y) = 0$, et soit $f \in \mathrm{Hom}_H(X, Y) \setminus \{0\}$.*

(a) Si f est injectif, alors le noyau de f est indécomposable et vérifie :

$$\dim_k \mathrm{Ext}_H^1(\mathrm{Ker} f, \mathrm{Ker} f) = \dim_k \mathrm{Hom}_H(X, Y) - 1 \ .$$

(b) Si f surjectif, alors le co-noyau de f est indécomposable et vérifie :

$$\dim_k \mathrm{Ext}_H^1(\mathrm{Coker} f, \mathrm{Coker} f) = \dim_k \mathrm{Hom}_H(X, Y) - 1 \ .$$

D'après un résultat de D. Happel et C.M. Ringel [5, 4.1], ces deux cas sont les seuls possibles.

1.4 Extensions ponctuelles

Soit A une algèbre et soit X un A-module. L'*extension ponctuelle* $A[X]$ de A par X est l'algèbre

$$A[X] = \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & k \end{pmatrix} .$$

La multiplication dans $A[X]$ est définie de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & x' \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ax' + x\lambda' \\ 0 & \lambda\lambda' \end{pmatrix} ,$$

pour tous $a, a' \in A,\ x, x' \in X,\ \lambda, \lambda' \in k$. On peut se représenter un $A[X]$-module comme un triplet

$$\begin{pmatrix} \bar{M} \\ V \end{pmatrix}_{\varphi}$$

où $\bar{M} \in A-$mod, $V \in k-$mod et $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(V, \mathrm{Hom}_A(X, M))$. La structure de $A[X]$-module est alors donnée par :

$$\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} am + (x)(v)\varphi \\ \lambda v \end{pmatrix} .$$

Comme A est une algèbre quotient de $A[X]$, nous obtenons l'inclusion pleine et exacte

$$A-\mathrm{mod} \hookrightarrow A[X]-\mathrm{mod} ,$$

qui est aussi stable par passage aux extensions. Nous identifions $A-$mod avec la sous-catégorie pleine de $A[X]-$mod dont les objets sont les triplets

$$\begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}_{0}$$

pour $U \in A-$mod. À tout $A[X]$-module M, on associe AM, le plus gros sous-module de M qui soit aussi un A-module.

Si $M = \begin{pmatrix} \bar{M} \\ V \end{pmatrix}_{\varphi}$, alors on a $AM = \begin{pmatrix} \bar{M} \\ 0 \end{pmatrix}_{0}$. Nous obtenons la suite exacte :

$$0 \longrightarrow AM \longrightarrow M \longrightarrow S_{\omega}^{N} \longrightarrow 0 ,$$

où $N = \dim_k V$ et où S_ω désigne le $A[X]$-module simple et injectif tel que $AS_\omega = 0$. Les $A[X]$-modules indécomposables projectifs sont les projectifs indécomposables de $A-$mod ainsi que le module supplémentaire

$$P_\omega = \begin{pmatrix} X \\ k \end{pmatrix}_{\alpha \mapsto \alpha\, \mathrm{id}_X} .$$

Nous en déduisons que la dimension projective d'un A-module n'est pas plus grande dans $A[X]-$mod que dans $A-$mod. Le radical de P_ω est X, et son inclusion dans P_ω nous fournit la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow P_\omega \longrightarrow S_\omega \longrightarrow 0.$$

L'application de $\mathrm{Hom}_{A[X]}(-, S)$ à cette suite nous donne directement le lemme :

Lemme 1.4.1 *Soit S un A-module simple. Alors :*

$$\mathrm{Hom}_A(X,S) \simeq \mathrm{Ext}^1_{A[X]}(S_\omega, S),$$

$$\mathrm{Ext}^1_A(X,S) \simeq \mathrm{Ext}^2_{A[X]}(S_\omega, S)\ .$$

Certaines suites d'Auslander-Reiten dans $A[X]-$mod peuvent être obtenues à partir de la structure d'Auslander-Reiten de A.

Proposition 1.4.2 *Soit* $0 \longrightarrow \tau_A M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$ *une suite d'Auslander-Reiten dans* $A-$mod. *Alors*

$$0 \longrightarrow \begin{pmatrix} \tau_A M \\ \mathrm{Hom}_A(X,\tau_A M) \end{pmatrix}_{\mathrm{id}_{(X,X)}} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ id \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} N \\ \mathrm{Hom}_A(X,\tau_A M) \end{pmatrix}_{(X,f)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} g \\ 0 \end{pmatrix}} M \longrightarrow 0$$

est la suite d'Auslander-Reiten dans $A[X]-$mod *ayant M pout terme final. Si l'on a en particulier* $\mathrm{Hom}_A(X,\tau_A M)=0$, *alors :*

$$\tau_A M \simeq \tau_{A[X]} M\ .$$

Pour un A-module X donné, on peut aussi construire la *co-extension ponctuelle* de A par X. Il s'agit de l'algèbre

$$[X]A = \begin{pmatrix} k & \mathrm{Hom}_A(X,k) \\ 0 & A \end{pmatrix}\ .$$

Les résultats que nous venons de formuler pour les extensions peuvent naturellement être dualisés. On obtient en particulier :

Proposition 1.4.3 *Soit* $\eta : 0 \longrightarrow N \longrightarrow Z \longrightarrow \tau_A^- N \longrightarrow 0$ *une suite d'Auslander-Reiten dans* $A-$mod. *Si* $\mathrm{Hom}_A(\tau_A^- N, X) = 0$, *alors η est aussi une suite d'Auslander-Reiten dans* $[X]A-$mod.

Chapitre 2

Le carquois d'Auslander-Reiten d'une extension ponctuelle

Soit k un corps algébriquement clos et soit $H = H_1 \times \ldots \times H_t$ un produit d'algèbres héréditaires sauvages connexes et de dimension finie $H_1, \ldots, H_t$. On peut supposer que H est l'algèbre des chemins d'un carquois $\mathcal{Q}$, dont les composantes connexes sont $\mathcal{Q}_1, \ldots, \mathcal{Q}_t$. On a alors : $H_\lambda \simeq k\mathcal{Q}_\lambda$ pout tout $\lambda \in \{1, \ldots, t\}$.

Soit $X \neq 0$ un H-module. Ce chapitre a pour but d'étudier de la structure d'Auslander-Reiten de l'extension ponctuelle $H[X]$, et en particulier de démontrer un critère d'existence d'une composante pré-injective dans le carquois d'Auslander-Reiten de $H[X]$.

2.1 Extensions ponctuelles d'algèbres héréditaires sauvages

Nous considérons l'extension ponctuelle A=$H[X]$ de H par un H-module X. D'après la proposition 1.1.3, il existe un carquois $\mathcal{Q}_A$ et un idéal I inclus dans $<k\mathcal{Q}^+>^2$ tels que :

$$A \simeq k\mathcal{Q}_A \ / \ I \ .$$

Soit $\{S_i, \ i \text{ point de } \mathcal{Q}\}$ un sytème complet de représentants pour les H-modules simples. Comme A possède (à isomorphisme près) exactement un module simple supplémentaire, $\mathcal{Q}_A$ contient exactement un point supplémentaire ω. Nous voulons maintenant déterminer les flèches de $\mathcal{Q}_A$ ainsi que le nombre de générateurs de I.

Soit $\mathcal{R} = \{\rho_1, \ldots, \rho_n\}$ un système minimal de générateurs de l'idéal I, tel que ρ_s soit pour tout $s \in \{1, \ldots, n\}$ une combinaison linéaire de chemins ayant le même point de départ et le même point d'arrivée. On appelle alors ρ_s une *relation dans* $\mathcal{Q}_A$. Pour deux points i, j de $\mathcal{Q}_A$ on note $N_{\mathcal{R}}(i,j)$ le nombre de relations de $\mathcal{R}$ partant de i et finissant en j, et $N_{\mathcal{F}}(i,j)$ le nombre de flèches de i vers j dans $\mathcal{Q}_A$. Un résultat de K. Bongartz [2, 1.1] nous permet d'évaluer ces nombres.

Proposition 2.1.1 *Soient i et j des points de $\mathcal{Q}_A$. Alors :*

$$N_{\mathcal{F}}(i,j) = \dim_k \operatorname{Ext}^1_A(S_i, S_i) \ ,$$

$$N_{\mathcal{R}}(i,j) = \dim_k \operatorname{Ext}^2_A(S_j, S_j) \ .$$

Cette proposition implique que $\mathcal{Q}$ est un sous-carquois plein de $\mathcal{Q}_A$. Comme le module simple supplémentaire S_ω est injectif, il n'y a pas de flèches qui arrivent en ω, c'est-à-dire que ω est une *source* de $\mathcal{Q}_A$. Pour tout point i de $\mathcal{Q}$, la dimension projective de S_i est identique dans $A-$mod et dans $H-$mod, donc le foncteur $\operatorname{Ext}^2_A(S_i, -)$ est trivial, et il n'y a pas de relations qui partent de i. Le point ω est donc le seul où des relations peuvent démarrer.

Soit $r \in \{0, \ldots, t+1\}$. Nous posons $X_1 \in H_1-$mod$, \ldots, X_t \in H_t-$mod tous non-triviaux, tels que $X_1, \ldots, X_r$ n'aient pas de facteurs directs indécomposables qui soient H-pré-projectifs, et tels que $X_{r+1}, \ldots, X_t$ n'aient pas de facteurs directs indécomposables qui soient H-pré-injectifs. Soit $m \in \mathbb{N}$. Nous formons la somme directe

$$X(m) = \tau_H^m X_1 \oplus \ldots \oplus \tau_H^m X_r \oplus \tau_H^{-m} X_{r+1} \oplus \ldots \oplus \tau_H^{-m} X_t \ .$$

Dans chaque composante connexe $\mathcal{Q}_\lambda$ de $\mathcal{Q}$, nous répartissons les points en deux ensembles :

- Pour $1 \leq \lambda \leq r$, on définit $\mathcal{S}_\lambda$ comme l'ensemble de tous les points i de $\mathcal{Q}_\lambda$ pour qui le module simple S_i est pré-injectif, et $\mathcal{T}_\lambda$ comme l'ensemble des autres points de $\mathcal{Q}_\lambda$.

- Pour $r+1 \leq \lambda \leq t$, on définit $\mathcal{S}_\lambda$ comme l'ensemble de tous les points i de $\mathcal{Q}_\lambda$ pour qui le module simple S_i est pré-injectif ou régulier, et $\mathcal{T}_\lambda$ comme l'ensemble des autres points de $\mathcal{Q}_\lambda$.

On note $\mathcal{S}$ l'union des $\mathcal{S}_\lambda$ et $\mathcal{T}$ celle des $\mathcal{T}_\lambda$. Comme il existe pour tout $\lambda \in \{1, \ldots, t\}$ des H_λ-modules simples injectifs et simples projectifs, on a toujours $|\mathcal{S}| \geq t$ et $|\mathcal{T}| \geq t$.

Proposition 2.1.2 *Soit A=$H[X(m)]$ l'extension ponctuelle de H par $X(m)$ et soit h, $h' \in \mathbb{N}$. Alors il existe $N_1 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $m \geq N_1$ les propriétés suivantes soient vraies :*

(a) Le carquois $\mathcal{Q}_A$ contient au moins h flèches de ω vers tout $i \in \mathcal{S}$ et aucune flèche de ω vers un point $i \in \mathcal{T}$.

(b) Les relations de $\mathcal{Q}_A$ démarrent toutes en ω. Aucune ne s'arrête en un point de $\mathcal{S}$ et en chaque point de $\mathcal{T}$ arrivent au moins h' relations.

Preuve : (a) Du lemme 1.4.1 et de la proposition 2.1.1, on déduit que :

$$N_{\mathcal{F}}(\omega, i) = \dim_k \operatorname{Ext}^1_A(S_\omega, S_i) = \dim_k \operatorname{Hom}_H(X, S_i)\,,$$

$$N_{\mathcal{R}}(\omega, i) = \dim_k \operatorname{Ext}^2_A(S_\omega, S_i) = \dim_k \operatorname{Ext}^1_H(X, S_i)\,.$$

À chaque H-module simple S_i, on peut associer exactement un $\lambda \in \{1, \ldots, t\}$ tel que S_i soit un H_λ-module. Nous pouvons donc ramener la discussion à un problème dans $H_\lambda-$mod. Nous choisissons N_0 tel qu'on ait pour tout $m \geq N_0$:

1. $\dim \operatorname{Hom}_{H_\lambda}(\tau^m_{H_\lambda} X_\lambda, S_i) \geq h$ pour tous $\lambda \in \{1, \ldots, r\}$ et $i \in \mathcal{S}_\lambda$.

1'. $\dim \operatorname{Hom}_{H_\lambda}(\tau^{-m}_{H_\lambda} X_\lambda, S_i) \geq h$ pour tous $\lambda \in \{r+1, \ldots, t\}$ et $i \in \mathcal{S}_\lambda$.

2. $\operatorname{Hom}_{H_\lambda}(\tau^m_{H_\lambda} X_\lambda, S_j) = 0$ pour tous $\lambda \in \{1, \ldots, r\}$ et $j \in \mathcal{T}_\lambda$.

2'. $\operatorname{Hom}_{H_\lambda}(\tau^{-m}_{H_\lambda} X_\lambda, S_j) = 0$ pour tous $\lambda \in \{r+1, \ldots, t\}$ et $j \in \mathcal{T}_\lambda$.

Ce choix est possible d'après les propositions du paragraphe 1.3 concernant les homomorphismes. Soit $m \geq N_0$. Il existe au moins h flèches de ω vers tout point $i \in \mathcal{S}_\lambda$ et aucune flèche de ω vers $j \in \mathcal{T}_\lambda$.

(b) Pour calculer le nombre de relations, nous utilisons la formule d'Auslander-Reiten (1.2.1) :

$$N_{\mathcal{R}}(\omega, i) = \dim_k \operatorname{Ext}^1_H(X, S_i) = \dim_k \operatorname{Hom}_H(S_i, \tau_H X)\,.$$

On déduit directement des propositions 1.3.1 et 1.3.3 qu'il existe $N_1 \geq N_0$ tel qu'on ait pour tout $m \geq N_1$:

3. $\operatorname{Hom}_{H_\lambda}(S_i, \tau^{m+1}_{H_\lambda} X_\lambda) = 0$ pour tous $\lambda \in \{1, \ldots, r\}$ et $i \in \mathcal{S}_\lambda$.

3'. $\operatorname{Hom}_{H_\lambda}(S_i, \tau^{-m+1}_{H_\lambda} X_\lambda) = 0$ pour tous $\lambda \in \{r+1, \ldots, t\}$ et $i \in \mathcal{S}_\lambda$.

4. $\dim_k \operatorname{Hom}_{H_\lambda}(S_i, \tau^{m+1}_{H_\lambda} X_\lambda) \geq h'$ pour tous $\lambda \in \{1, \ldots, r\}$ et $j \in \mathcal{T}_\lambda$.

4'. $\dim_k \operatorname{Hom}_{H_\lambda}(S_i, \tau^{-m+1}_{H_\lambda} X_\lambda) \geq h'$ pour tous $\lambda \in \{r+1, \ldots, t\}$ et $j \in \mathcal{T}_\lambda$.

Ceci signifie que, pour ce choix de $X(m)$, les seules relations possibles partent de ω et arrivent en un point de $\mathcal{T}$, et qu'il y a de ω vers chaque point de $\mathcal{T}$ au moins h' relations.

2.2 Le carquois d'Auslander-Reiten de $H[X(m)]$

Nous choisissons comme dans le paragraphe 2.1 un H-module $X(m)$ de la forme

$$X(m) = \tau_H^m X_1 \oplus \ldots \oplus \tau_H^m X_r \oplus \tau_H^{-m} X_{r+1} \oplus \ldots \oplus \tau_H^{-m} X_t.$$

Soit μ le nombre des éléments de $\mathcal{S}$.

Théorème : *Soit $m \gg 0$ et soit l'extension ponctuelle $A = H[X(m)]$. Alors on a :*

(a) Le carquois d'Auslander-Reiten de A possède exactement une composante pré-injective. C'est la composante pré-injective d'une algèbre de chemins sauvage $\tilde{A}$ ayant $(\mu+1)$ modules simples.

(b) Le carquois $\Gamma(A)$ contient aussi une infinité de composantes $\mathcal{C}$ de type $\mathbb{Z}\mathbf{A}_\infty$ telles que :

$$\forall\ M \in \mathcal{C} \quad \exists\ l_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \tau_A^l M \in \tilde{A}-\mathrm{mod} \quad \forall\ l \geq l_0.$$

(c) Pour tout $\tilde{A}$-module régulier N, il existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\tau_A^l \tau_{\tilde{A}}^{l_0} N \simeq \tau_{\tilde{A}}^{l+l_0} N \quad \textit{pour tout } l \geq 0.$$

Si, pour un $\lambda \in \{1, \ldots, t\}$, le module X_λ n'a pas de facteurs directs indécomposables qui soient H-pré-projectifs, alors on a de plus :

(d) $\mathcal{P}(H_\lambda)$ est une composante pré-projective de $\Gamma(A)$.

(e) Le carquois d'Auslander-Reiten de A contient une infinité de composantes $\mathcal{D}$ de type $\mathbb{Z}\mathbf{A}_\infty$ telles que

$$\forall\ M \in \mathcal{D} \quad \exists\ l_0 \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad \tau_A^{-l} M \in H-\mathrm{mod} \quad \forall\ l \geq l_0.$$

(f) Pour tout H_λ-module régulier N, il existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\tau_A^{-l} \tau_H^{-l_0} N \simeq \tau_H^{-l-l_0} N \quad \textit{pour tout } l \geq 0.$$

Nous voulons tout d'abord définir un nombre N tel que ce théorème soit vrai pour tout $m \geq N$. Soit Q_j l'enveloppe injective de S_j dans $A-\mathrm{mod}$ pour tout $j \in \mathcal{T}$. L'enveloppe injective de S_j dans $H-\mathrm{mod}$ est alors $H_\lambda Q_j$. Les résultats des paragraphes précédents nous livrent des entiers naturels $N_1, \ldots, N_5$, satisfaisant les conditions suivantes :

1. $N_1 \in \mathbb{N}$ est choisi d'après la proposition 2.1.2 pour $h = \dim_k H$ et $h' = h^2 + 1$.
2. Soit $\lambda \in \{1, \ldots, t\}$ tel que X_λ ait un facteur direct indécomposable H-régulier. D'après la proposition 1.3.4, il existe $N_2(\lambda)$ tel que chaque homomorphisme $\tau_{H_\lambda}^- S_j \longrightarrow H_\lambda Q_j$ factorise par $\tau_{H_\lambda}^m X_\lambda$ (respectivement $\tau_{H_\lambda}^{-m} X_\lambda$) pour tous $m \geq N_2$ et $j \in \mathcal{T}_\lambda$. Soit N_2 le maximum de ces $N_2(\lambda)$.

3. Soit $\lambda \in \{1, \ldots, r\}$ tel que X_λ soit un H-module pré-injectif. Alors, d'après le corollaire 1.3.5(a) il existe un entier naturel $N_3(\lambda)$ tel qu'on ait un monomorphisme $\tau_{H_\lambda}^{-} S_j \longrightarrow \tau_{H_\lambda}^{m} X_\lambda$ pour tout $m \geq N_3(\lambda)$ et tout $j \in \mathcal{T}_\lambda$. Soit N_3 le maximum de ces $N_3(\lambda)$.
4. Soit $\lambda \in \{r+1, \ldots, t\}$ tel que X_λ soit un H-module pré-projectif. Pour $j \in \mathcal{T}_\lambda$, S_j est aussi pré-projectif et on peut donc choisir $s \in \mathbb{N}$ (dépendant de j) tel que $\tau_{H_\lambda}^{s} S_j$ soit indécomposable projectif. Alors, d'après le corollaire 1.3.5(b) il existe un entier naturel $N_4(\lambda)$ tel qu'on ait un épimorphisme $\tau_{H_\lambda}^{-m+s} X_\lambda \longrightarrow \tau_{H_\lambda}^{s} H_\lambda Q_j$ pour tout $m \geq N_4(\lambda)$ et tout $j \in \mathcal{T}_\lambda$. Soit N_4 le maximum de ces $N_4(\lambda)$.
5. Il existe N_5 tel que $\tau_{H_\lambda}^{m} X_\lambda$ (respectivement $\tau_{H_\lambda}^{-m} X_\lambda$) soit sincère dans $H_\lambda-$mod pour tout $m \geq N_5$.

Nous posons N=max$\{N_1, \ldots, N_5\}$ choisissons $m \geq N$. Nous allons maintenant définir une algèbre facteur de $A = H[X(m)]$ et montrer qu'elle possède une composante pré-injective.

Soit $1_H = \sum_{i=1}^{n} e_i$ la décomposition de l'unité de H en idempotents deux à deux orthogonaux et tels que l'on ait :

$$He_i / \operatorname{rad}(Hei) \ \simeq \ S_i \quad \forall\, i \in \mathcal{Q}_0 \ .$$

Nous considérons pour $\tilde{e} = \sum_{j \in \mathcal{T}} e_i$ l'algèbre quotient

$$\tilde{A} = A \ / < \tilde{e} > .$$

Celle-ci est une algèbre héréditaire sauvage possédant $(\mu + 1)$ simples. Nous savons en effet grâce au choix de $m \geq N_1$ que :

$$\tilde{A} \ \simeq \ k\mathcal{Q}_{\tilde{A}} \,,$$

où $\mathcal{Q}_{\tilde{A}}$ est le sous-carquois plein de $\mathcal{Q}_A$ ayant pour points les éléments de $\{\omega\} \cup \mathcal{S}$. Le carquois $\mathcal{Q}_{\tilde{A}}$ est connexe et sauvage, car il a plus de deux points ($\mu \geq 1$) et car il contient au moins $h = \dim_k(H)$ flèches de ω vers chaque point de $\mathcal{S}$. Nous en déduisons que le carquois d'Auslander-Reiten de $\tilde{A}$ a exactement une composante pré-injective $\mathcal{I}(\tilde{A})$, qui est infinie.

La projection $A \longrightarrow \tilde{A}$ nous fournit une inclusion pleine et exacte

$$\tilde{A}-\text{mod} \hookrightarrow A-\text{mod}$$

Nous allons maintenant démontrer que $\mathcal{I}(\tilde{A})$ est également une composante de $\Gamma(A)$.

La seule source de $\mathcal{Q}_{\tilde{A}}$ est ω. Le module simple injectif S_ω est donc le seul puits de $\mathcal{I}(\tilde{A})$, ainsi que le terme final de la suite d'Auslander-Reiten dans $\tilde{A}-$mod suivante :

$$0 \longrightarrow \tau_{\tilde{A}} S_\omega \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathcal{S}} Q_i^{\alpha_i} \longrightarrow S_\omega \longrightarrow 0 \qquad (\mathcal{E}),$$

où $\alpha_i \geq h$ désigne le nombre de flèches $\omega \to i$, et où Q_i est l'enveloppe injective de S_i dans $\tilde{A}-$mod. Comme il n'y a pas de relations dans $\mathcal{Q}_A$ qui se terminent en un point i de $\mathcal{S}$, le module Q_i est également l'enveloppe injective de S_i dans $A-$mod. Ainsi, la suite $\mathcal{E}$ est aussi une suite d'Auslander-Reiten dans $A-$mod.

Supposons que $\mathcal{I}(\tilde{A})$ n'est pas une composante de $\Gamma(A)$. Alors il existe un module indécomposable $U \in \mathcal{I}(\tilde{A})$, un A-module indécomposable M et une application irréductible dans $A-$mod

$$M \longrightarrow U \;\text{ oder }\; U \longrightarrow M.$$

Comme $\mathcal{E}$ est une suite d'Auslander-Reiten de $A-$mod dans laquelle tous les $\tilde{A}$-modules injectifs indécomposables apparaissent, la τ_A-orbite de M doit donc contenir un module qui soit A-injectif. Nous pouvons donc choisir M injectif dans $A-$mod. Cela signifie que M est isomorphe à l'enveloppe injective Q_j dans $A-$mod d'un module simple S_j pour un $j \in \mathcal{T}$.

Il nous suffit alors de prouver qu'il n'existe pas de A-module indécomposable injectif Q_j de socle S_j pour un $j \in \mathcal{T}$, tel que le module quotient Q_j/S_j possède un facteur direct dans $\mathcal{I}(\tilde{A})$. Pour ceci, nous utilisons la proposition suivante :

Proposition-clé : *Soit $m \geq N$ et $j \in \mathcal{T}$. Alors on a :*

(A) Le module $Y_j = Q_j/S_j$ est une brique dans $A-$mod, c'est-à-dire que $\mathrm{End}_A(Y_j)$ est isomorphe à k.

(B) Y_j a des auto-extensions. Si Y_j peut être considéré comme un $\tilde{A}$-module, il est alors régulier dans $\tilde{A}-$mod.

2.3 Démonstration de la proposition-clé

Soit $j \in \mathcal{T}$. Nous choisissons $\lambda \in \{1, \ldots, t\}$ tel que j soit un point de $\mathcal{Q}_\lambda$.

(A) Y_j est une brique pour tout $m \geq N$.

Soit $m \geq N$ et soit η la suite exacte courte $0 \longrightarrow S_j \longrightarrow Q_j \longrightarrow Y_j \longrightarrow 0$. Il nous suffit de prouver que le k-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_A(Q_j, Y_j)$ est de dimension 1. Le module Y_j est alors une brique.

Nous appliquons le foncteur $\mathrm{Hom}_A(Q_j,-)$ à η et obtenons la suite exacte longue :

$$0 = \mathrm{Hom}_A(Q_j,S_j) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Q_j,Q_j) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Q_j,Y_j) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(Q_j,S_j)$$

Nous allons montrer que $\mathrm{Ext}^1_A(Q_j,S_j) = 0$. Alors on aura :

$$\mathrm{Hom}_A(Q_j,Q_j) \simeq \mathrm{Hom}_A(Q_j,Y_j) \simeq k \ ,$$

et l'assertion (A) sera démontrée. Selon la formule d'Auslander-Reiten 1.2.1, on a :

$$\mathrm{Ext}^1_A(Q_j,S_j) \simeq \mathrm{D}\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau_A^- S_j,Q_j) \ .$$

Comme on a choisi $m \geq N_1$ et $j \in \mathcal{T}$, on sait que $\mathrm{Hom}_A(X,S_j) = 0$. D'après la proposition 1.4.2, on a alors $\tau_A^- S_j \simeq \tau_H^- S_j$. Nous considérons donc un homomorphisme $f \in \mathrm{Hom}_A(\tau_H^- S_j,Q_j)$.

Comme $S_j \in H_\lambda-$mod, le translaté $\tau_{H_\lambda}^- S_j \simeq \tau_H^- S_j$ est un H_λ-module. La catégorie $H_\lambda-$mod est stable par passage aux images, le morphisme f doit donc factoriser par l'inclusion $\epsilon : H_\lambda Q_j \hookrightarrow Q_j$. Nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\tau_{H_\lambda}^- S_j \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, equal] & H_\lambda Q_j \arrow[d, "\epsilon"] \\
\tau_{H_\lambda}^- S_j \arrow[r, "f"] & Q_j
\end{tikzcd} ,$$

où $f_\lambda \in \mathrm{Hom}_{H_\lambda}(\tau_{H_\lambda}^- S_j, H_\lambda Q_j)$. Nous montrons que f_λ factorise par le H_λ-module $\tau_{H_\lambda}^m X_\lambda$ (respectivement $\tau_{H_\lambda}^{-m} X_\lambda$).

Si X_λ possède un facteur direct indécomposable qui soit H_λ-régulier, alors cette factorisation est assurée par le choix de $m \geq N_2$.

Soit maintenant X_λ pré-injectif dans $H_\lambda-$mod, et donc $1 \leq \lambda \leq r$. S_j est régulier ou pré-projectif dans $H_\lambda-$mod. Comme m est supérieur ou égal à N_3, il existe un monomorphisme $\alpha : \tau_{H_\lambda}^- S_j \longrightarrow \tau_{H_\lambda}^m X_\lambda$. Puisque $H_\lambda Q_j$ est un H_λ-modul injectif, f_λ factorise donc par α.

Pour finir, nous considérons le cas où X_λ est pré-projectif dans H_λ-mod (et donc $\lambda \geq r+1$). Nous choisissons $s \in \mathbb{N}$ tel que $\tau_{H_\lambda}^{s-1} S_j$ soit indécomposable et H_λ-projectif. Il existe un épimorphisme $\pi : \tau_{H_\lambda}^{-m+s} X_\lambda \longrightarrow \tau_{H_\lambda}^s H_\lambda Q_j$. Le morphisme $\tau_{H_\lambda}^s f_\lambda \in \mathrm{Hom}_H(\tau_H^{s-1} S_j, \tau_H^s H_\lambda Q_j)$ est défini sur un module projectif. Il factorise donc par π et f_λ factorise ainsi par le morphisme translaté $\tau_{H_\lambda}^{-s}\pi \in \mathrm{Hom}_{H_\lambda}(\tau_{H_\lambda}^- S_j, \tau_{H_\lambda}^{-m} X_\lambda)$.

Dans les trois cas, nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \tau_{H_\lambda}^{\pm m} X_\lambda \arrow[r, "\beta"] & H_\lambda Q_j \arrow[d, "\epsilon"] \\ \tau_{H_\lambda}^{-} S_j \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "f"] & Q_j \end{tikzcd} .$$

Le module Q_j est injectif dans $A-$mod. L'application $\beta\epsilon$ factorise donc par l'inclusion de $\tau_{H_\lambda}^{m} X_\lambda$ (respectivement de $\tau_{H_\lambda}^{-m} X_\lambda$) dans P_ω. Ainsi, f factorise par le module A-projectif P_ω. On a donc pour tout $m \geq N$:

$$\mathrm{Ext}_A^1(Q_j, S_j) \simeq \mathrm{D}\,\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau_{H_\lambda}^{-} S_j, Q_j) = 0.$$

Le module Y_j est donc une brique dans $A-$mod.

(B) Y_j a des auto-extensions pour $m \geq N$.

Sei $m \geq N$. En appliquant $\mathrm{Hom}_A(Y_j, -)$ à η, nous obtenons :

$$0 = \mathrm{Ext}_A^1(Y_j, Q_j) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(Y_j, Y_j) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^2(Y_j, S_j) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^2(Y_j, Q_j) = 0 .$$

Il suffit donc de montrer que $\mathrm{Ext}_A^2(Y_j, S_j) \neq 0$. Nous considérons la suite exacte courte θ :

$$0 \longrightarrow HY_j \longrightarrow Y_j \longrightarrow (S_\omega)^z \longrightarrow 0 ,$$

où $z = (\underline{\dim}\, Q_j)_\omega = (\underline{\dim}\, P_\omega)_j = (\underline{\dim}\, X(m))_j$. Comme on a $m \geq N_5$, le module $X(m)$ est sincère dans $H-$mod, et donc z est supérieur ou égal à 1. Nous appliquons $\mathrm{Hom}_A(-, S_j)$ à θ :

$$\begin{aligned} 0 = \mathrm{Ext}_A^1(S_\omega{}^z, S_j) &\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(Y_j, S_j) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^1(HY_j, S_j) \longrightarrow \ \ldots \\ \mathrm{Ext}_A^2(S_\omega{}^z, S_j) &\longrightarrow \mathrm{Ext}_A^2(Y_j, S_j) \longrightarrow \mathrm{Ext}_A^2(HY_j, S_j) = 0 . \end{aligned}$$

Nous savons que $\mathrm{Ext}_A^1(S_\omega, S_j)$ est trivial grâce au choix de $m \geq N_1$. Puisque HY_j est un H-module, sa dimension projective dans $A-$mod est comme dans $H-$mod 0 oder 1, et on a donc $\mathrm{Ext}_A^2(HY_j, S_j) = 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \dim_k \mathrm{Ext}_A^2(Y_j, S_j) = {} & z \dim_k \mathrm{Ext}_A^2(S_\omega, S_j) - \dim_k \mathrm{Ext}_A^1(HY_j, S_j) \\ & + \dim_k \mathrm{Ext}_A^1(Y_j, S_j) \\ \geq {} & \dim_k \mathrm{Ext}_A^2(S_\omega, S_j) - \dim_k \mathrm{Ext}_H^1(HY_j, S_j) . \end{aligned}$$

La dimension de $\mathrm{Ext}_H^1(HY_j, S_j)$ est une constante de H, elle peut donc être majorée indépendemment de m. Pour tout i on a $\dim_k \mathrm{Ext}_H^1(S_i, S_j) \leq h$ et la longueur de HY_j est au plus h, ce qui entraîne : $\dim_k \mathrm{Ext}_H^1(HY_j, S_j) \leq h^2$. Nous avons choisi N_1 de telle sorte que

$$\forall\ m \geq N_1 \quad \dim_k \mathrm{Ext}_A^2(S_\omega, S_j) \geq h^2 + 1.$$

Pour $m \geq N$, on a donc : $\dim_k \operatorname{Ext}^2_A(Y_j, S_j) \geq 1$. Ainsi, Y_j possède des auto-extensions.

Remarque : Si Y_j peut être considéré comme un $\tilde{A}$-module, il est alors régulier dans $\tilde{A}-$mod. Y_j est en particulier une brique de quasi-longueur au plus μ dans $\tilde{A}-$mod d'après M. Hoshino [6, 2.6] et même, si $\mu > 1$, de quasi-longueur au plus $(\mu - 1)$ d'après O. Kerner et F. Lukas [9, 3.3].

2.4 Démonstration du théorème

Soit $m \geq N$.

(a) : Nous déduisons de la proposition-clé que, pour $j \in \mathcal{T}$, Y_j ne possède pas de facteur direct dans $\mathcal{I}(\tilde{A})$. Donc, $\mathcal{I}(\tilde{A})$ est une composante de $\Gamma(A)$. Comme elle contient le seul module simple injectif de $A-$mod, elle est ainsi la seule composante pré-injective de $\Gamma(A)$.

(b) et *(c)* : Nous allons voir maintenant que A peut être considérée comme une co-extension ponctuelle itérée de $\tilde{A}$. Soit en effet $j_1 \in \mathcal{T}$ un puits de Q_A. Alors on a :

$$A \simeq \begin{pmatrix} k & \operatorname{Hom}_k(Y_{j_1}, k) \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} = [Y_{j_1}]A_1 \ ,$$

où A_1 est l'algèbre quotient $A/ < e_{j_1} >$. Nous répétons ce procédé avec $j_2 \in \mathcal{T}$ puits de $Q_A \setminus \{j_1\}$, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'ensemble $\{j_1, \ldots, j_s\}$ constitue $\mathcal{T}$ tout entier. Alors, nous obtenons :

$$A \simeq [Y_{j_1}] \ldots [Y_{j_s}]A_s \ ,$$

où $A_s \simeq A \ / < e_{j_1}, \ldots, e_{j_s} >= A \ / < \tilde{e} >= \tilde{A}$. Des applications successives de la proposition 1.4.3 nous livrent le lemme suivant

Lemme 2.4.1 *Soit* $M \in \tilde{A}-$mod *tel que* $\operatorname{Hom}_A(\tau^-_{\tilde{A}} M, Y_j) = 0$ *pour tout* $j \in \mathcal{T}$. *Alors on a :*

$$\tau^-_{\tilde{A}} M \simeq \tau^-_A M \ .$$

Soit Z un $\tilde{A}$-module régulier. Nous cherchons un $l_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'espace $\operatorname{Hom}_A(\tau^{l+l_0}_{\tilde{A}} Z, Y_j)$ soit trivial pour tout $l \geq 0$ et pour tout $j \in \mathcal{T}$. On peut alors déduire du lemme 2.4.1 : $\tau^{l+l_0}_{\tilde{A}} Z \simeq \tau^l_A \tau^{l_0}_{\tilde{A}} Z$ pour tout $l \geq 0$.

Soit $j \in \mathcal{T}$. Nous savons grâce à la proposition-clé que Y_j est une brique. Soit $\tilde{Y}_j$ le plus grand $\tilde{A}$-sous-module de Y_j. Chaque morphisme de $\operatorname{Hom}_A(\tau^l_{\tilde{A}} Z, Y_j)$ factorise par l'inclusion $\tilde{Y}_j \hookrightarrow Y_j$. Il nous suffit donc de montrer qu'il n'existe pas de morphismes non-triviaux de $\tau^l_{\tilde{A}} Z$ vers $\tilde{Y}_j$ pour $l \gg 0$.

$\tilde{Y}_j$ est un $\tilde{A}$-Modul et $\tau_{\tilde{A}}^l Z$ est régulier dans $\tilde{A}-$mod. Il ne nous reste donc qu'à montrer que $\tilde{Y}_j$ n'a pas de facteurs directs qui soient $\tilde{A}$-pré-injectifs. C'est évident dans les cas particuliers $Y_j = \tilde{Y}_j$ et $\tilde{Y}_j = 0$, puisque $\tilde{Y}_j$ est alors un $\tilde{A}$-module régulier.

Supposons donc que $\tilde{Y}_j \neq 0$ n'est pas un $\tilde{A}$-module. Il n'a pas de facteur direct qui soit $\tilde{A}$-injectif, parce que les modules $\tilde{A}$-injectifs sont aussi A-injectifs, et parce qu'il est inclus dans le A-module indécomposable non-injectif Y_j. Nous considérons la suite d'Auslander-Reiten ayant pour terme final S_ω

$$0 \longrightarrow \tau_{\tilde{A}} S_\omega \longrightarrow \bigoplus_{i \in \mathcal{S}} Q_i^{\alpha_i} \longrightarrow S_\omega \longrightarrow 0 \qquad (\mathcal{E})$$

et lui appliquons le foncteur $(\tilde{A}e_i, -)$ pour $i \in \mathcal{S}$. Nous obtenons :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\tilde{A}e_i, \tau_{\tilde{A}} S_\omega) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\tilde{A}e_i, \bigoplus_{p \in \mathcal{S}} Q_p^{\alpha_p}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(\tilde{A}e_i, S_\omega) = 0 \, .$$

Alors on a : $(\underline{\dim}\, \tau_{\tilde{A}} S_\omega)_i \geq (\underline{\dim}\, Q_i^{\alpha_i})_i = \alpha_i \geq h > (\underline{\dim}\, \tilde{Y}_j)_i$ pour tout $i \in \mathcal{S}$. Nous en déduisons que $\tau_{\tilde{A}} S_\omega$ ne peut pas non plus être un facteur direct de $\tilde{Y}_j$. Nous construisons pour tout $i \in \mathcal{S}$ une suite exacte courte dans $\tilde{A}-$mod :

$$0 \longrightarrow K_i \longrightarrow Q_i \longrightarrow S_\omega \longrightarrow 0 \quad (\mathcal{F}) \ ,$$

où l'épimorphisme est une application irréductible provenant de $\mathcal{E}$. Nous déduisons alors de la proposition 1.3.6 que K_i est une brique et que :

$$\dim_k \mathrm{Ext}_A^1(K_i, K_i) = \dim_k \mathrm{Hom}_A(Q_i, S_\omega) - 1 = \alpha_i - 1 > 0 \ .$$

K_i est donc un $\tilde{A}$-module régulier. Nous appliquons maintenant s fois $\tau_{\tilde{A}}$ à la suite $\mathcal{F}$, et obtenons des épimorphismes $\tau_{\tilde{A}}^s Q_i \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}}^s S_\omega$ pour tout $i \in \mathcal{S}$ et pour tout $s \in \mathbb{N}$.

Pour tout $i \in \mathcal{S}$, nous choisissons une application irréductible $\varphi_i : \tau_{\tilde{A}} S_\omega \to Q_i$ provenant de $\mathcal{E}$. Le socle de $\tau_{\tilde{A}} S_\omega$ n'est pas simple, φ_i ne peut donc pas être injective. Comme φ_i est irréductible, elle est donc surjective. Nous procédons avec la suite

$$0 \longrightarrow R_i \longrightarrow \tau_{\tilde{A}} S_\omega \longrightarrow Q_i \longrightarrow 0 \quad (\mathcal{F}') \ ,$$

de la même façon qu'avec $\mathcal{F}$, cela nous fournit des épimorphismes $\tau_{\tilde{A}}^{s+1} S_\omega \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}}^s Q_i$ pour tout $i \in \mathcal{S}$ et tout $s \in \mathbb{N}$. Nous obtenons ainsi une suite infinie

$$\ldots \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}}^{s+1} S_\omega \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}}^s Q_i \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}}^s S_\omega \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}}^2 S_\omega \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}} Q_i \twoheadrightarrow \tau_{\tilde{A}} S_\omega \, .$$

Soit N un $\tilde{A}$-module indécomposable pré-injectif, mais non-injectif. N est isomorphe à $\tau_{\tilde{A}}^s S_\omega$ ou à $\tau_{\tilde{A}}^s Q_i$ pour un $s \geq 1$ et un $i \in \mathcal{S}$ convenablement fixés. Il existe donc un morphisme surjectif de N vers $\tau_{\tilde{A}} S_\omega$. Nous en déduisons :

$$(\underline{\dim}\, N)_i \geq (\underline{\dim}\, \tau_{\tilde{A}} S_\omega)_i \geq h > (\underline{\dim}\, \tilde{Y}_j)_i \ .$$

pour tout $i \in \mathcal{S}$. $\tilde{Y}_j$ n'a donc pas de facteur direct qui soit $\tilde{A}$-pré-injectif. Nous avons alors :

$$\forall\ j \in \mathcal{S} \quad \exists\ l_j \in \mathbb{N} \text{ mit } \quad \forall\ l \geq 0 \quad \mathrm{Hom}_A(\tau_{\tilde{A}}^{l+l_j} Z, \tilde{Y}_j) = 0\ .$$

(c) est donc vraie pour l_0 =max$\{l_j,\ j \in \mathcal{T}\}$. Comme il y a une infinité de composantes régulières dans $\Gamma(\tilde{A})$, et qu'elles sont toutes de type $\mathbb{Z}\mathbf{A}_\infty$, nous obtenons une infinité de composantes dans $A-$mod qui vérifient les conditions de *(b)*.

(d), *(e)* und *(f)* : Soit $\lambda \in \{1, \ldots, t\}$ et soit X_λ sans facteur direct pré-projectif. Il découle directement de la proposition 1.4.2 que $\mathcal{P}(H_\lambda)$ est aussi une composante pré-projective de $\Gamma(A)$, puisque qu'il n'existe que des morphismes triviaux de $X(m)$ vers chaque H_λ-module pré-projectif. Soit $\mathcal{C}$ une composante régulière de $\Gamma(H_\lambda)$ et soit $M \in \mathcal{C}$. Le module X_λ se décompose en une somme directe de H_λ-modules pré-injectifs et réguliers. D'après les propositions 1.3.1 et 1.3.3, il existe donc un entier l_0 tel que pour tout $l \geq l_0$ les morphismes de $\tau_H^m X_\lambda$ (respectivement de $\tau_H^{-m} X_\lambda$) vers $\tau_H^{-l} M$ soient tous triviaux. Alors, d'après la proposition 1.4.2 on a :

$$\tau_A^{-l} \tau_H^{-l_0} M \ \simeq \tau_H^{-l-l_0} M \quad \forall\ l \geq 0\ ,$$

ce qui prouve nos deux dernières affirmations.

Chapitre 3

Exemples

3.1 Extensions ponctuelles de l'algèbre de Kronecker généralisée

Soit $r \geq 3$ et $\mathcal{Q}_r$ le carquois de Kronecker généralisé

$$\overset{2}{\bullet} \quad \underset{\alpha_r}{\overset{\alpha_1}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\vdots}}}} \quad \overset{1}{\bullet} \ .$$

L'algèbre des chemins $H = k\mathcal{Q}_r$ est sauvage. Le module simple S_1 au point 1 est projectif, alors que S_2 est injectif. Soit X un H-module sans facteur direct pré-injectif. Pour $0 \neq m \in \mathbb{N}$, nous formons l'extension ponctuelle de H par $\tau_H^{-m}X$ et obtenons ainsi l'algèbre $H[\tau_H^{-m}X]$ comme l'algèbre des chemins du carquois avec relations

$$\overset{\omega}{\bullet} \quad \underset{\beta_s}{\overset{\beta_1}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\vdots}}}} \quad \overset{2}{\bullet} \quad \underset{\alpha_r}{\overset{\alpha_1}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longrightarrow}{\vdots}}}} \quad \overset{1}{\bullet} \ ,$$

où $s = \underline{\dim}(\tau_H^{-m}X)_2$. Le nombre de relations est déterminé par le vecteur-dimension de module $\tau_H^{-m}X$. D'après le théorème, si nous choisissons m assez grand, alors le carquois d'Auslander-Reiten de $H[\tau_H^{-m}X]$ aura une composante pré-injective contenant deux τ-orbites.

Si X ne possède pas de facteurs directs indécomposables pré-projectifs, le carquois d'Auslander-Reiten de $H[\tau_H^{-m}X]$ contient une composante pré-projective : celle de H. Dans le cas où un facteur direct indécomposable de X est pré-projectif, il n'existe en général pas de composante pré-projective.

Lemme 3.1.1 *Soit X un H-module qui possède un facteur direct indécomposable pré-projectif P ainsi qu'un facteur direct indécomposable régulier R. Alors, le carquois d'Auslander-Reiten de $H[\tau_H^{-m}X]$ n'a pas de composante pré-projective.*

Preuve : Nous choisissons P tel qu'aucun de ses prédécesseurs ne soit un facteur direct de X. Si $\mathcal{P}$ était une composante pré-projective de $H[\tau_H^{-m}X]$, alors elle devrait contenir le seul $H[\tau_H^{-m}X]$-module projectif simple S_1, ainsi que le début de $\mathcal{P}(H)$ (c'est à dire tous les prédécesseurs de $\tau_H^{-m}P$) d'après la proposition 1.4.2. C'est pourquoi $\tau_H^{-m}P$, P_ω et $\tau_H^{-m}R$ devraient alors aussi se trouver dans $\mathcal{P}$. Or, $\tau_H^{-m}R$ se trouve sur un cycle, car il est un H-module régulier. Il ne peut donc pas appartenir à $\mathcal{P}$. Il s'ensuit que $H[\tau_H^{-m}X]$ ne possède pas de composante pré-projective..

Si X est maintenant un module pré-projectif, nous pouvons déduire de [4, 2.6] résultat suivant.

Proposition 3.1.2 *Soit X un H-module pré-projectif. Si tous les facteurs directs de X se trouvent sur une tranche, alors $H[\tau_H^{-m}X]$ possède une commposante pré-projective munie de trois τ-orbites.*

Si X ne remplit pas les hypothèses de cette proposition, $H[\tau_H^{-m}X]$ n'a pas de composante pré-projective.

Lemme 3.1.3 *Soit X un H-module pré-projectif indécomposable et soit $X = Y \oplus \tau_H^{-}Y$. Alors $H[\tau_H^{-m}X]$ n'a pas de composante pré-projective pour tout $m \geq 0$.*

Preuve : Si $H[\tau_H^{-m}X]$ possède une composante pré-projective $\mathcal{P}$, alors elle doit contenir le seul $H[\tau_H^{-m}X]$-module projectif simple S_1. Le processus d'extension ponctuelle ne modifie pas la structure d'Auslander-Reiten de $\mathcal{P}(H)$ jusqu'à $\tau_H^{-m}Y$. Le module $\tau_H^{-m}Y$ se trouve donc sur $\mathcal{P}$. Comme $\tau_H^{-m}Y$ est un facteur direct du radical de P_ω, le module P_ω doit appartenir à $\mathcal{P}$. Mais ceci est impossible car P_ω est placé sur un cycle. Considérons en effet la suite d'Auslander-Reiten dans $H[\tau_H^{-m}X]-$mod qui se termine en $\tau_H^{-m-1}Y$:

$$0 \longrightarrow \tau_{H[\tau_H^{-m}X]}\tau_H^{-m-1}Y \longrightarrow Z \longrightarrow \tau_H^{-m-1}Y \longrightarrow 0\ .$$

Nous déduisons de la proposition 1.4.2 que $\tau_{H[\tau_H^{-m}X]}\tau_H^{-m-1}Y$ est un quotient de P_ω. Nous obtenons ainsi le cycle

$$P_\omega \longrightarrow \tau_{H[\tau_H^{-m}X]}\tau_H^{-m-1}Y \longrightarrow Z \longrightarrow \tau_H^{-m-1}Y \longrightarrow P_\omega$$

et P_ω ne peut pas être pré-projectif. $H[\tau_H^{-m}X]$ ne possède donc pas de composante pré-projective.

3.2 L'algèbre de Kronecker étendue

Soit $H = kQ$ l'algèbre étendue de Kronecker, c'est-à-dire l'algèbre des chemins du carquois

$$\overset{3}{\bullet} \longrightarrow \overset{2}{\bullet} \rightrightarrows \overset{1}{\bullet}\ .$$

Nous considérons X_0, le module indécomposable régulier ayant pour vecteur-dimension (1 2 0). Les premiers translatés de X_0 ont les vecteurs-dimension suivants :

$$\begin{array}{rcl} \underline{\dim}(\tau_H^- X_0) & = & (\ 3 \quad 2 \quad 2\ ) \\ \underline{\dim}(\tau_H^{-2} X_0) & = & (\ 5 \quad 4 \quad 0\ ) \\ \underline{\dim}(\tau_H^{-3} X_0) & = & (15 \quad 10 \quad 4) \end{array}$$

Soit $X = \tau_H^{-3} X_0$. La catégorie orthogonale $X^\perp$ de X est la sous-catégorie pleine de $H-$mod contenant les objets :

$$\{Y \in A\text{−mod} \mid \mathrm{Hom}_H(X,Y) = 0 = \mathrm{Ext}^1_H(X,Y)\}$$

Alors, $M = P_3 \oplus \tau_H^{-3} P_3$ est un générateur projectif minimal de $X^\perp$. L'espace $\mathrm{Hom}_H(P_3, \tau_H^{-3} P_3)$ est de dimension $\underline{\dim}(\tau_H^{-3} P_3)_3 = 3$, l'anneau des endomorphismes de M est donc une algèbre héréditaire sauvage, isomorphe à l'algèbre des chemins du carquois

$$\bullet \ \begin{array}{c}\longrightarrow\\[-6pt]\longrightarrow\\[-6pt]\longrightarrow\end{array} \ \bullet \ .$$

Le module $T = M \oplus X$ est un module basculant dans $H-$mod. L'algèbre basculée $\mathrm{End}_A(T)$ peut être décrite de la faqn suivante :

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_A(T) &\simeq \begin{pmatrix} \mathrm{End}_H(M) & \mathrm{Hom}_H(M,X) \\ \mathrm{Hom}_H(X,M) & \mathrm{End}_H(X) \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} \mathrm{End}_H(M) & \mathrm{Hom}_H(M,X) \\ 0 & k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et est ainsi l'extension ponctuelle de l'algèbre $C = \mathrm{End}_H(M)$ par le C-module $E = \mathrm{Hom}_H(M,X)$. La classe libre de torsion associée à T ne contient qu'un nombre fini d'éléments, la composante connectante est donc une composante pré-injective dans $\Gamma(C[E])$, elle se compose de trois τ-orbites. Par contre, si nous translatons le module E assez loin dans la direction τ_C ou τ_C^-, alors le théorème nous indique que $C[\tau_C^m E]$ possède une composante pré-injective à deux τ-orbites pour $|m| \gg 0$.

3.3 Algèbres canoniques

Les algèbres canoniques sont une classe d'algèbres importante, qui a été introduite par C. M. Ringel [14] . Soit $t \geq 2$ et $n_1, \ldots, n_t \in \mathbb{N}$. Nous nous intéressons au carquois $\mathcal{Q}(n_1, \ldots, n_t)$:

$$\begin{tikzcd}
 & p_1^{(1)} \arrow[r, "\alpha_2^{(1)}"] & p_2^{(1)} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\alpha_{n_1-1}^{(1)}"] & p_{n_1-1}^{(1)} \arrow[ddr, "\alpha_{n_1}^{(1)}"] & \\
 & p_1^{(2)} \arrow[r, "\alpha_2^{(2)}"] & p_2^{(2)} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\alpha_{n_2-1}^{(2)}"] & p_{n_2-1}^{(2)} \arrow[dr, "\alpha_{n_2}^{(2)}"'] & \\
\omega \arrow[uur, "\alpha_1^{(1)}"] \arrow[ur, "\alpha_1^{(2)}"'] \arrow[dr, "\alpha_1^{(t)}"'] & & \vdots & & \vdots & 0 \\
 & p_1^{(t)} \arrow[r, "\alpha_2^{(t)}"] & p_2^{(t)} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\alpha_{n_1-1}^{(1)}"] & p_{n_t-1}^{(t)} \arrow[ur, "\alpha_{n_t}^{(t)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Pour $s \in \{1, \ldots, t\}$, nous notons $\alpha^{(s)}$ le chemin $\alpha^{(s)} = \alpha_{n_s}^{(s)} \ldots \alpha_2^{(s)} \alpha_1^{(s)}$. Soit I l'idéal de $k\mathcal{Q}(n_1, \ldots, n_t)$ engendré par les chemins $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(t)}$. Un sous-espace J de I est dit *générique* si :

(a) $\dim_k J = t - 2$

(b) J intersecte tout sous-espace $< \alpha^{(s)}, \alpha^{(s')} >$ trivialement.

On appelle *algèbre canonique de type* $(n_1, \ldots, n_t)$ toute algèbre définie par le carquois $\mathcal{Q}(n_1, \ldots, n_t)$ muni d'un idéal de relations générique J. Une algèbre canonique A peut toujours être considérée comme une extension ponctuelle de l'algèbre des chemins du carquois $\mathcal{Q}'$, obtenu de $\mathcal{Q}$ en ôtant ω et les flèches qui en partent. Le radical M du module indécomposable projectif P_ω au point ω est un $k\mathcal{Q}'$-Modul. On a donc :

$$A \simeq k\mathcal{Q}'[M] \; .$$

Le vecteur-dimension de M dans $k\mathcal{Q}'$ est :

$$\underline{\dim}(M) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & 2 \\ 1 & \cdots & 1 & \end{pmatrix} \; .$$

Réciproquement, on sait d'après F. Lukas [13, 4.4], que chaque extension ponctuelle de $k\mathcal{Q}'$ avec un module élémentaire E de dimension $\underline{\dim}(M)$ est une algèbre canonique. Soit E un $k\mathcal{Q}'$-module élémentaire. Alors, $\tau_{k\mathcal{Q}'}^{m} E$ est lui aussi élémentaire, et le carquois d' Auslander-Reiten de $k\mathcal{Q}'[\tau_{k\mathcal{Q}'}^{m} E]$ possède pour $|m| \gg 0$ une composante pré-injective avec $(1 - t + \sum p_{n_i})$ τ-orbites. Comme $\tau_{k\mathcal{Q}'}^{m} E$ est régulier, la composante pré-projective $\mathcal{P}(k\mathcal{Q}')$ est la composante pré-projective de $\Gamma(k\mathcal{Q}'[\tau_{k\mathcal{Q}'}^{m} E])$.

Bibliographie

[1] M. Auslander, I. Reiten et S. Smalø. Representation theory of Artin algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1994.

[2] K. Bongartz. Algebras and quadratic forms. J. Lond. Math., Soc. II. Ser. **28** (1983), 461-469.

[3] Yu. A. Drozd. Tame and wild matrix problems. In : Representation Theory II, Springer Lecture Notes in Math. **832** (1980), 242-258.

[4] D. Happel, I. Reiten et S. Smalø. Tilting in abelian categories and quasitilted algebras. Mem. Am. Math. Soc. **575** (1996).

[5] D. Happel et C.M. Ringel. Tilted algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **274** (1982), 399-443.

[6] M. Hoshino. Modules without self-extensions and Nakayama's conjecture. Arch. Math. **43** (1984), 493-500.

[7] O. Kerner. Representations of wild quivers. CMS Conf. Proceed. **19** (1996), 65-107.

[8] O. Kerner. Factorisations of morphisms for wild hereditary algebras. In : Representations of algebras. Lect. Notes Pure Appl. Math. **224** (2002), 121-127.

[9] O. Kerner et F. Lukas. Regular stones of wild hereditary algebras. J. Pure Appl. Algebra **93**, No.1 (1994), 15-31.

[10] O. Kerner et A. Skowroński. On the structure of modules over wild hereditary algebras. Manuscr. Math. **108**, No.3 (2002), 369-383.

[11] S. König. Tame and wild socle-projective categories and generalized Bäckström orders. Commun. Algebra **18**, No.3 (1990), 889-925.

[12] S. Lache. Stückweise erbliche Einpunkterweiterungen. Diss. Düsseldorf 1997.

[13] F. Lukas. Elementare Moduln über wilden erblichen Algebren. Diss. Düsseldorf 1993.

[14] C.M. Ringel. Tame algebras and integral quadratic forms. Springer Lecture Notes in Math. **1099** (1984).

[15] H. Strauss. On the perpendicular category of a partial tilting module. J. Algebra **144**, No.1 (1991), 43-66.

[16] L. UNGER. On wild tilted algebras which are squids. Arch. Math. **55** (1990), 542-550.